

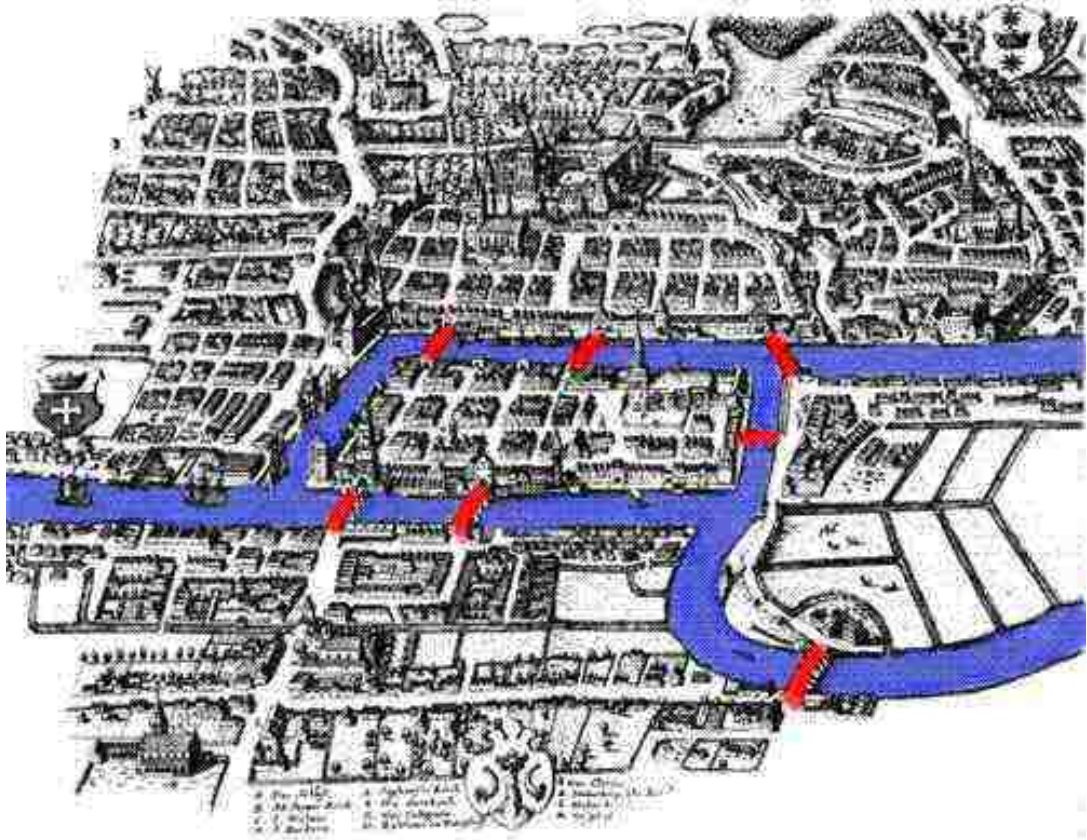
Königsberg köprüleri

Königsberg şimdi Rusya'da yer alan ve günümüzde batı Rusya'nın büyük bir endüstri ve ticaret merkezi olan şimdiki adı Kaliningrad olan bir zamanlar doğu Prusya'nın başkenti olan bir şehirdir. Şehir başka bir nehir ile birleşen Pregel nehrinin etrafında kurulmuştur. Kneiphof adındaki ada iki nehrin birleştiği yerin ortasında yer almaktadır. Adayı ve nehirlerin iki tarafındaki şehrin farklı bölgelerini birleştiren yedi tane köprü vardır. 18. yüzyılda Königsberg'in belediye başkanı her gün şehri gezmektedir. Ancak her seferinde bir köprüden iki defa geçmektedir. Her köprüden yalnız bir defa geçmek suretiyle bütün şehri dolaşması mümkün olmamaktadır. Bu problem [Euler](#)'in dikkatini çeker.

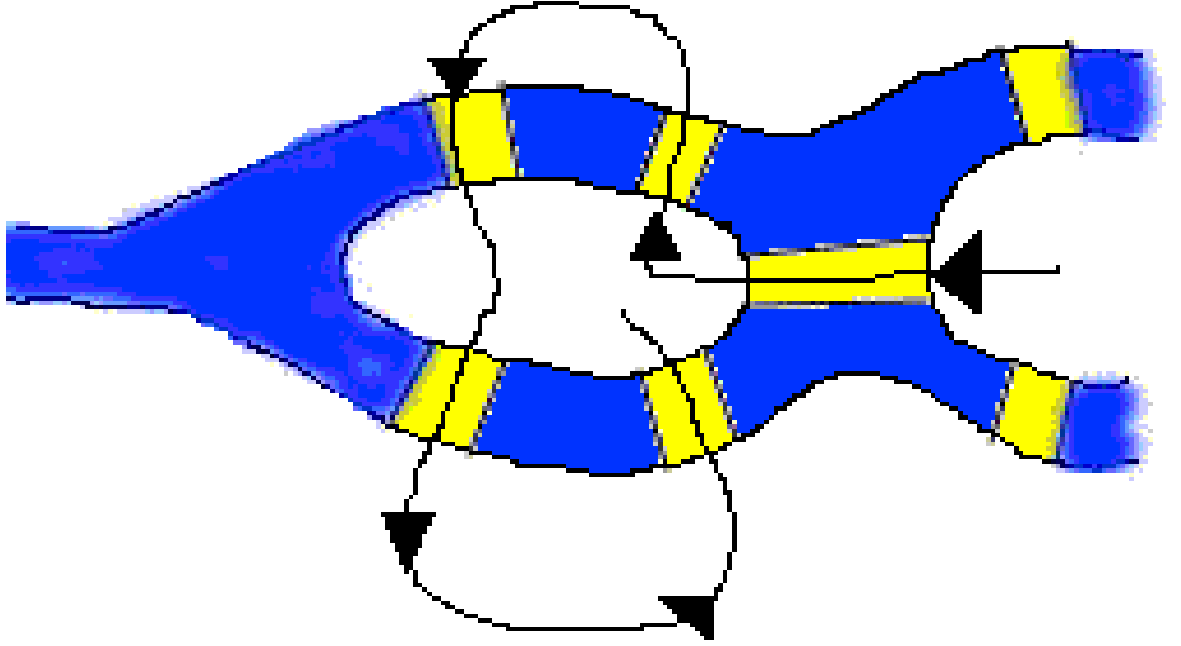
Königsberg köprüleri Problemi

- 1736 da [Euler](#) "Königsberg köprüleri problemi" olarak bilinen problemi çözer. Matematiksel olarak yedi köprüden her birini yalnız bir kere geçmek kaydıyla yürümenin mümkün olmadığını ispat eder.

Königsberg köprülerinin bir şeması

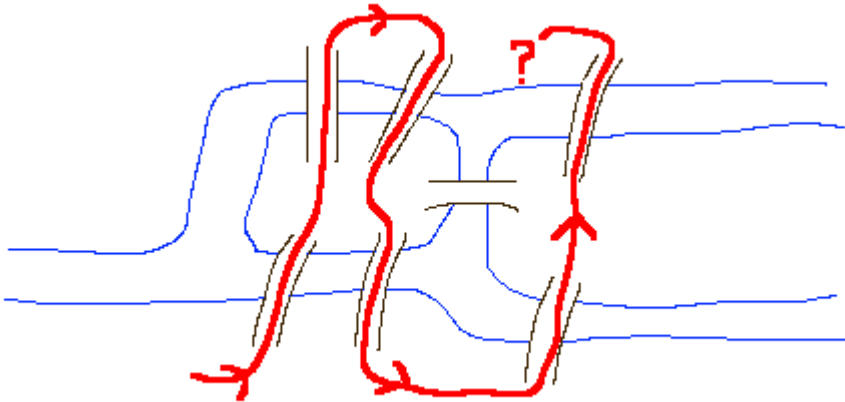


Başarısızlıkla sonuçlanan bir deneme aşağıda görülmektedir.

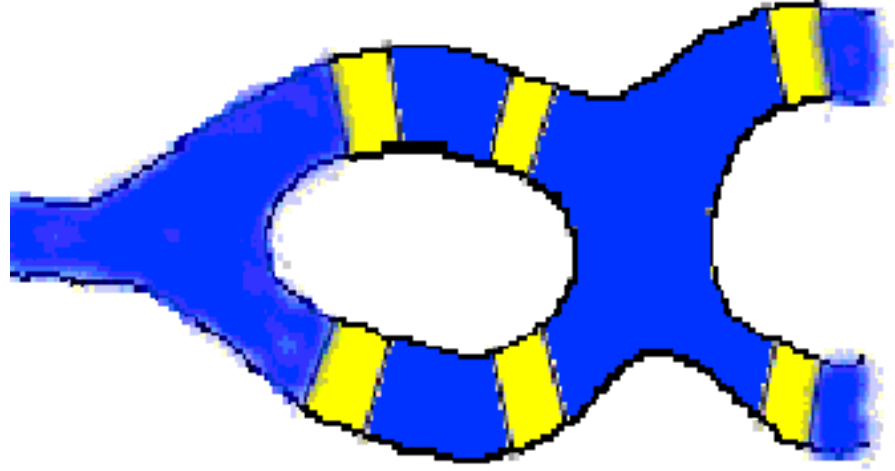


•
•
•
•
•
•
•

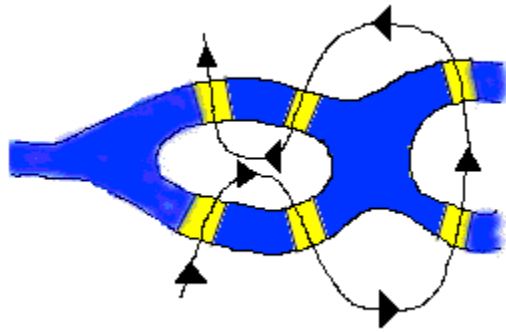
Başarısızlıkla sonuçlanan bir başka deneme aşağıda görülmektedir.



- Konigsberg'de aşağıdaki şekilde olduğu gibi bir tane eksik kopru yapılmasına karar verilmiş olduğunu varsayalım:



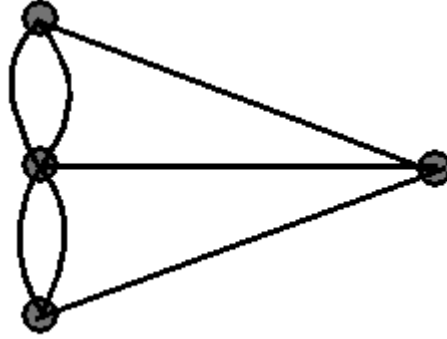
Bu problem ozulebilirdir. ozumlerden biri aşağıdadır:



- Gerçek Konigsberg probleminden bunun farkı nedir? Her bir kara parçasına giden kaç köprü vardır? Bir tek parça kara parçasına tek sayıda köprünün olması neden problem olmaktadır.?

- Hangi köprüyü eksik almamız durumu farklı yapar mı? Eğer köprü sayısını arttırsak ne olur? Bazı grafikler çizip ve her bir durumda bazı yolculuklar planladığımızda Euler'in aşağıdaki düşüncesine varırız.

Könisberg'deki kara parçalarını noktalarla ve köprüleri eğri parçaları ile gösterirsek aşağıdaki şekli elde ederiz.



Konigsberg köprüleri problemine matematiksel bakış

Tanım. Birbirine bağlı eğriler veya doğrular (edges) ile noktalardan (vertices) oluşan şekle bir grafik denir.

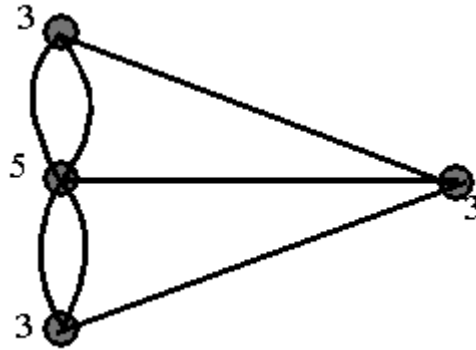
- Şimdi problem, bir çizgiden bir daha geçmeksizin ve kalemi kağıttan kaldırmaksızın bu şekli çizme problemine dönüşmüş olur.

Tanım. Eğer bir grafikte bir noktaya tek sayıda eğri bağlı ise bu noktaya tek mertebeden bir nokta denir aksi takdirde çift mertebeden nokta denir.

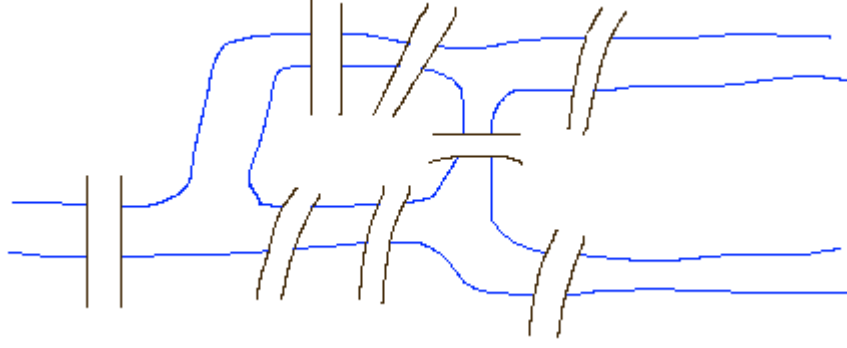
Euler'in Çözümü

Euler'in Könisberg köprüleri probleminin çözümünde grafiği çizerken işlemin ortasında bir noktaya gelindiğinde bu noktaya bir tane gelen bir tane de bu noktadan giden eğri olmalı böylece noktanın mertebesi çift olmalıdır. Bu bütün noktalar için doğru olmalı fakat biri çizime başladığımız diğeri de çizimi bitirdiğimiz nokta olmak üzere iki nokta dışında her noktanın mertebesi çift olmalıdır ve böylece ilgili grafiğin çizilebilir olması için gerek ve yeter koşul en fazla iki tane tek mertebeden noktasının olmasıdır. (Başlangıç ve bitiş noktasının aynı olabilir ki bu durumda her noktanın mertebesinin çift olması gerekiyor.) Şimdi yukarıdaki grafiğe baktığımızda ikiden fazla tek mertebeden nokta olduğunu görüyoruz ve böylece grafik çizilemez yani Könisberg deki yürüyüş turu imkansızdır. Burada çizimden kastımız bir çizgi ya da kenardan (veya eğri parçasından) bir daha geçmeksizin çizimin yapılması anlamındadır. Eulerin düşüncesi çözülebilir olan problemlerde başlangıç noktası tek ve bitiş noktasının tek mertebeden olması gerektiğini vermektedir.

Aşağıdaki grafda her noktanın mertebesi yanında yazılı bulunmaktadır. Aşağıdaki şekilde Könisberg köprüleri probleminde her bir noktanın mertebesini görmekteyiz.



Könisberg'de aşağıdaki şekilde olduğu gibi bir tane fazla köprü yapıldığını yani sekiz tane köprü kurulduğunu varsayalım. Bu durumda bir köprüden (çizgiden) bir daha geçmeden bütün köprülerden geçilebilir mi? Evet geçilebilir.

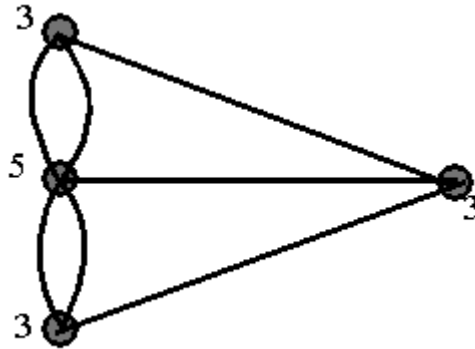


Königsberg köprüleri probleminin Graf Teorisine Genelleştirilmesi

Euler generalized this mode of thinking by making the following definitions and proving a theorem:

- Tanım. Birbiriyle kesişmeyen eğriler(arklar) ile birbirine bağlı noktalardan (vertices) oluşan bir şekle bir network denir.

Aşağıdaki networkda her bir noktaya (vertexe) gelen eğri (edge) sayısını görmekteyiz.



Tanım. Her bir eğri parçasından yalnız bir defa geçen sürekli yola (eğriye) Euler yolu denir.

Teorem: Eğer bir network ikiden fazla tek mertebeden noktaya sahipse Euler yoluna sahip değildir.

- Euler karşıtını da ispatlamıştır:

Teorem: Eğer bir network iki ya da ikiden az sayıda tek mertebeden noktaya sahipse bir Euler yoludur.



Königsberg
Köprüleri

Sinem Abdülmecit

11/TM-A

116

- *Koenigsberg Rusya'da yer alan ve günümüzde Batı Rusya'nın büyük endüstri merkezi olan bir şehirdir...*
- *Şehir başka bir nehir ile birleşen Pregel Nehri etrafına kurulmuştur.*

- *Kniephof adındaki ada(A) iki nehrin birleştiği yerin ortasında yer almaktadır.*
- *Adayı ve nehirleri birleştiren 7 tane köprü vardır.*

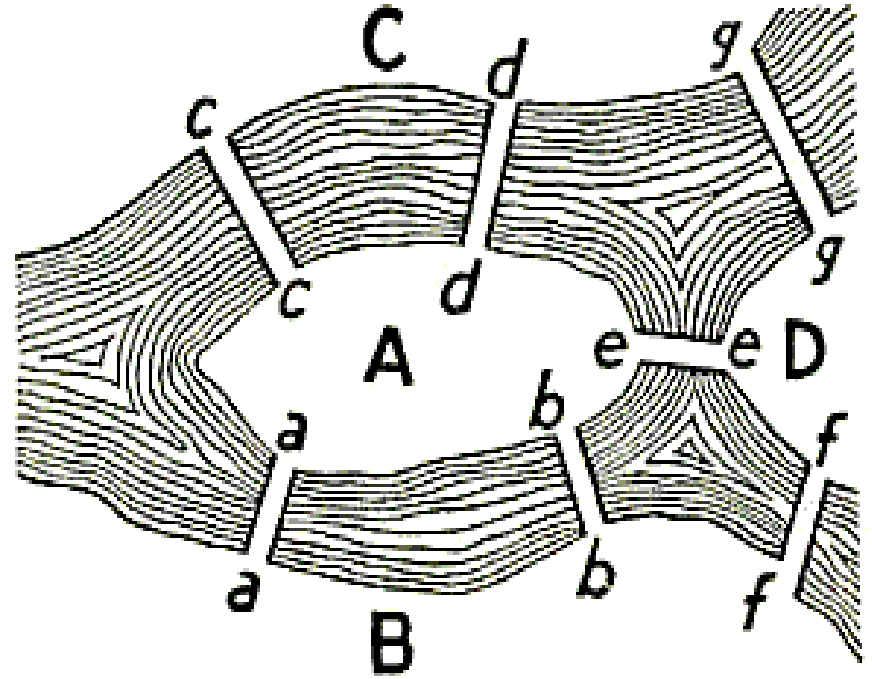


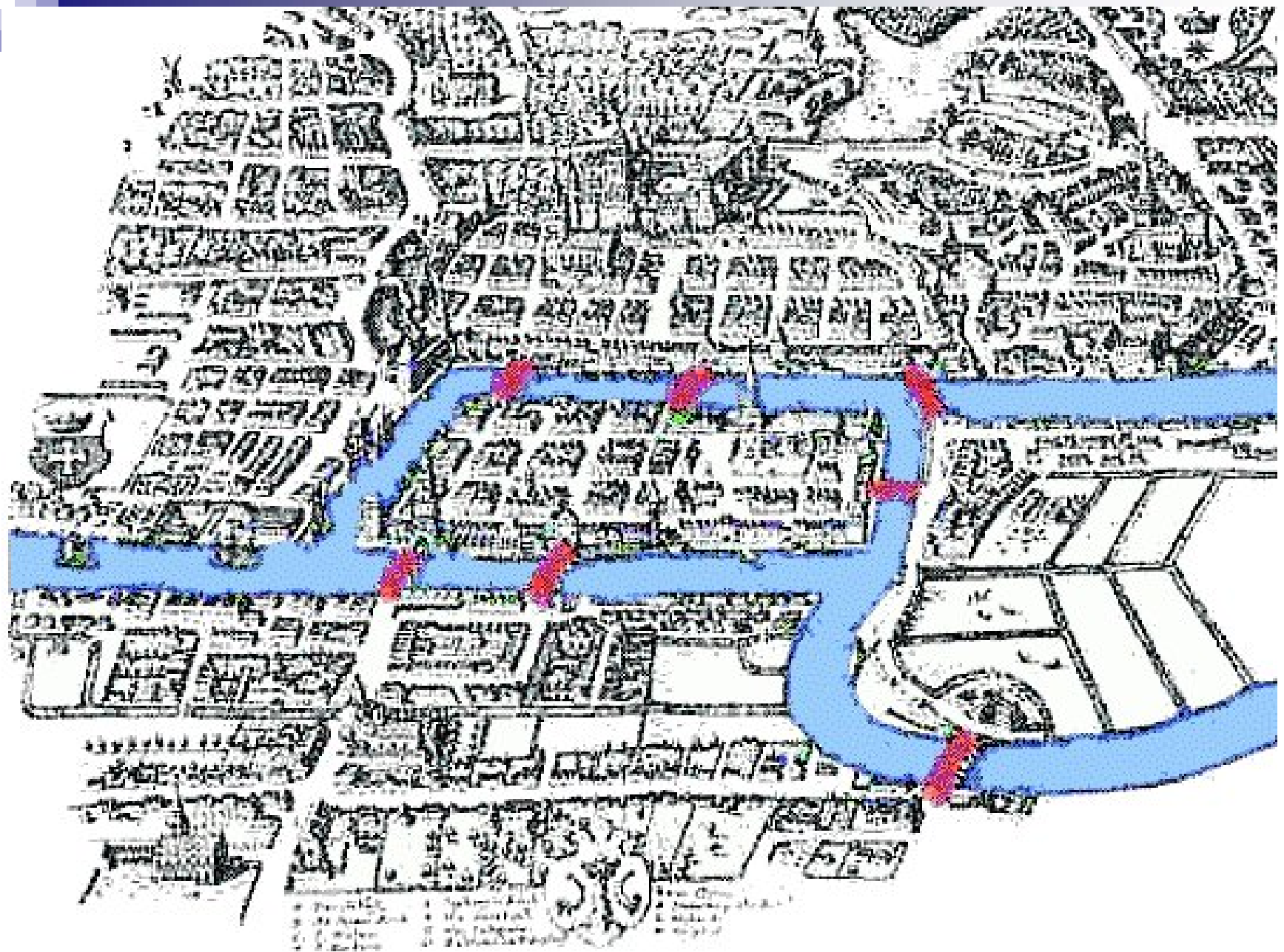
FIGURE 98. *Geographic Map:
The Königsberg Bridges.*

- *18. yy'da Koenigsberg'in Belediye Başkanı her gün şehri gezmektedir. Ancak her seferinde bir köprüden iki defa geçmektedir. Her köprüden yalnız bir kere geçmek suretiyle bütün şehri dolaşması mümkün olmamaktadır. Bu problem Euler'in dikkatini çeker..*



KOENIGSBERG
KÖPRÜLER
PROBLEMİ

- 1736'da Euler Koenigsberg köprüleri problemi olarak bilinen problemi çözer.
- Matematiksel olarak yedi köprüden her birinin yalnız bir kere geçmek kaydıyla yürümenin mümkün olmadığını ispat eder..



- | | | |
|--------------------------|------------------------------|------------------------|
| 1. Downtown | 2. University | 3. City Center |
| 4. East Side | 5. West Side | 6. South Side |
| 7. North Side | 8. Central Business District | 9. Industrial District |
| 10. Residential District | 11. Park | 12. Waterfront |

- *Koenigsberg'de bir tane eksik köprü yapılmasına karar verilmiş olduğunu varsayarsak bu problem çözülebilirdir!*

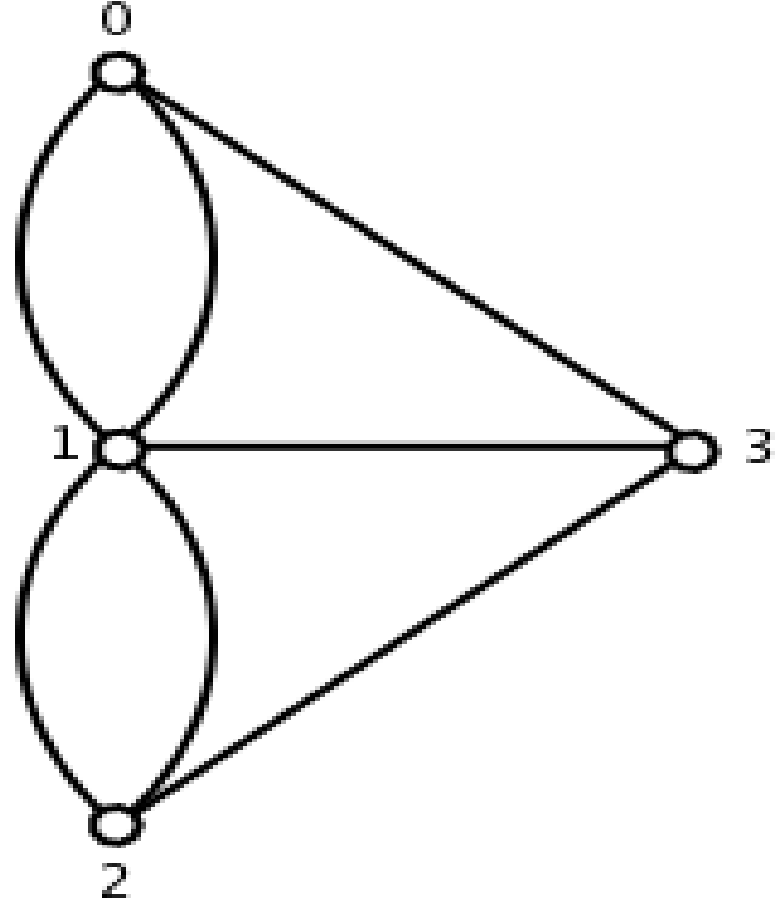
KOENIGSBERG

KÖPRÜLERİNE

MATEMATİKSEL BAKIŞ

- 
- *Birbirine bağlı eğriler veya doğrular ile noktalardan oluşan şekle grafik denir.*

- **PROBLEM:** *Bir çizgiden bir daha geçmeksizin ve kalemi kağıttan kaldırmaksızın bu şekil nasıl çizilir?*





EULER'İN ÇÖZÜMÜ

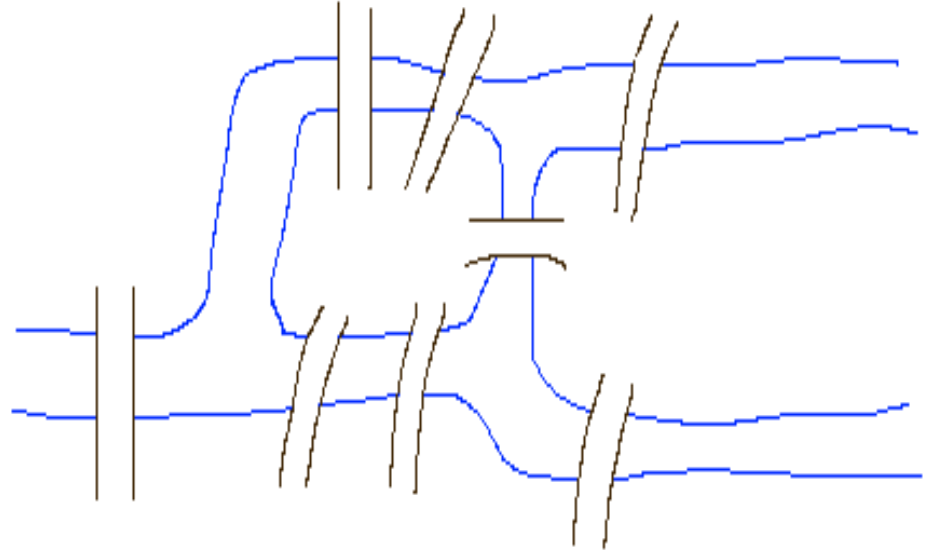
- *Euler'in Königsberg köprüleri probleminin çözümünde grafiği çizerken işlemin ortasında bir noktaya gelindiğinde bu noktaya bir tane gelen bir tane de bu noktadan giden eğri olmalı böylece noktanın mertebesi çift olmalıdır.*

- *Bu bütün noktalar için doğru olmalı fakat biri çizime başladığımız diğeri de çizimi bitirdiğimiz nokta olmak üzere iki nokta dışında her noktanın mertebesi çift olmalıdır ve böylece ilgili grafiğin çizilebilir olması için gerek ve yeter koşul en fazla iki tane tek mertebeden noktasının olmasıdır. (Başlangıç ve bitiş noktasının aynı olabilir ki bu durumda her noktanın mertebesinin çift olması gerekiyor.)*

- *SONUÇ:Könisberg'deki yürüyüş turu imkansızdır!*

- KANITI: Euler turumuz G olsun. Her köprüde en az iki durum vardır (gidiş-geliş). Ayrıca bir köprüden iki kez geçmeyen ve başladığı noktaya geri dönen bir yolculuk vardır ve buna C olsun. Eğer C , G 'deki bütün kenarları içeriyorsa durum çözülebilirdir. Ancak içermiyorsa G 'den C 'deki kenarları çıkardığımızda geriye kalan parçalar olduğundan tur tamamlanamamaktadır.

- *Königsberg'de yandaki şekilde olduğu gibi bir tane fazla köprü yapıldığını yani sekiz tane köprü kurulduğunu varsayalım. Bu durumda bir köprüden (çizgiden, bir daha geçmeden bütün köprülerden geçilebilir mi? Evet geçilebilir. Bu durum köprü sayısını altıya indirildiğinde geçerlidir.*



- Yani 7 tane köprümüz vardır ve her köprüde bir gidiş bir de geliş olmak üzere 2 alternatif vardır. Bu nedenle 7'yi 2'ye böldüğümüz zaman kalan 1'dir. Bu da bir köprüden geçilemediğini gösterir. Ancak 8 köprümüz olduğunda 8, 2'ye tam bölünebildiği için kalanımız 0'dır. Yani geçilmemiş köprü bulunmamaktadır. Bu nedenle her köprüden geçildiği için tur tamamlanabilmektedir.

- Yandaki Şekle göre eğer e noktası e' (e ss) ne taŐınırđa her köprüden bir kere geçmek koŐuluyla baŐalanılan noktaya geri dnlebilmektedir.

😊TEŞEKKÜRLER😊